

סמסטר ב', מועד ב', תשס"ג  
 תאריך הבחינה: 25.09.2003  
 מספר קורס: 0365-1102

מספר התלמיד \_\_\_\_\_

### בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.

לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.

באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות

זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

|   |    |   |    |    |    |   |   |   |
|---|----|---|----|----|----|---|---|---|
|   | x  |   |    |    | x  |   | x | x |
|   |    | x |    |    | x  | x | x | x |
|   |    |   | x  |    | x  | x | x | x |
|   |    |   | x  | x  |    | x | x | x |
| 0 | -2 | 6 | -2 | -2 | -4 | 4 | 0 |   |

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.

לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

|   |  |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|---|--|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
|   |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  |
| א |  |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
| ב |  |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
| ג |  |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
| ד |  |   |   |   |   |   |   |   |   |  |

  

|   |   |    |    |    |    |    |  |    |    |    |    |    |    |
|---|---|----|----|----|----|----|--|----|----|----|----|----|----|
|   | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |  | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| א |   |    |    |    |    |    |  |    |    |    |    |    |    |
| ב |   |    |    |    |    |    |  |    |    |    |    |    |    |
| ג |   |    |    |    |    |    |  |    |    |    |    |    |    |
| ד |   |    |    |    |    |    |  |    |    |    |    |    |    |

## סוגיה 1

יש 100 כדורים ממוספרים  $0, 1, \dots, 99$ . כדור אחד נבחר באקראי. יהי  $X$  המספר שלו,  $N$  מספר הספרות ב- $X$ ,  $Y$  סכום הספרות ב- $X$ . למשל:

$$X=0 \quad 1 \dots 7 \dots 10 \dots 23 \dots 99$$

$$N=0 \quad 1 \dots 1 \dots 2 \dots 2 \dots 2$$

$$Y=0 \quad 1 \dots 7 \dots 1 \dots 5 \dots 18$$

1. מצא את ההסתברות  $\mathbb{P}(N=2)$ .

$$\frac{1}{3} \text{ (ג)} \qquad \frac{10}{11} \text{ (ב)} \qquad \frac{89}{99} \text{ (א)}$$

2. מצא את התוחלת  $\mathbb{E}(N)$ .

$$1.8 \text{ (ג)} \qquad 1.89 \text{ (ב)} \qquad 1 \text{ (א)}$$

3. מצא  $\mathbb{E}(X)$ .

$$50 \text{ (ג)} \qquad 54.5 \text{ (ב)} \qquad 49.5 \text{ (א)}$$

4. מצא את התוחלת המותנה  $\mathbb{E}(X | N=2)$ .

$$54.5 \text{ (ג)} \qquad 49.05 \text{ (ב)} \qquad 49.5 \text{ (א)}$$

5. מצא את השונות המותנה  $\text{Var}(X | N=1)$ .

$$\frac{20}{3} \text{ (ג)} \qquad \frac{3}{5} \text{ (ב)} \qquad 49.05 \text{ (א)}$$

6. מצא  $\mathbb{E}(NX)$ .

$$93.555 \text{ (ג)} \qquad 98.55 \text{ (ב)} \qquad 114 \text{ (א)}$$

7.  $\text{Cov}(N, X) < 0$  (א)

(ב) מ"מ  $N, X$  ב"ת.

(ג)  $\text{Cov}(N, X) > 0$ .

8. מצא את השונות המשותפת  $\text{Cov}(X, Y)$ .

$$93.555 \text{ (ג)} \qquad \frac{363}{4} \text{ (ב)} \qquad \frac{220}{3} \text{ (א)}$$

רמז:  $Y = U + V$ ,  $X = 10U + V$

## סוגיה 2

מפזרים באקראי את ארבעת המספרים 1, 2, 3, 4 בארבע משבצות של טבלה  $2 \times 2$ , מספר אחד בכל משבצת. למשל:  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ . נגדיר מאורעות

$A$ : סכום המספרים בשורה ראשונה שווה לסכום המספרים בשורה שניה;  
 $B$ : סכום המספרים בעמודה ראשונה שווה לסכום המספרים בעמודה שניה;  
 $C$ : סכום המספרים באלכסון ראשון שווה לסכום המספרים באלכסון שני.

9.

(א) מאורעות  $A, B, C$  תלויים, אבל ב"ת בזוגות;  
 (ב) מאורעות  $A, B, C$  ב"ת;  
 (ג) מאורעות  $A, B, C$  זרים בזוגות.

10. מצא את ההסתברות  $\mathbb{P}(A)$ .

(א)  $\frac{1}{2}$       (ב)  $\frac{1}{6}$       (ג)  $\frac{1}{4}$

הניסוי כמו לע"ל בוצע פעמיים (באופן ב"ת).

11. מאורע  $B$  התרחש בשני הניסויים. מצא את ההסתברות (המותנה) לכך שכל הטבלה בניסוי השני זהה לטבלה בניסוי הראשון.

(א)  $\frac{1}{3}$       (ב)  $\frac{1}{16}$       (ג)  $\frac{1}{8}$

12. מאורע  $B$  לא התרחש באף אחד משני הניסויים. מצא את ההסתברות (המותנה) לכך שכל הטבלה בניסוי השני זהה לטבלה בניסוי הראשון.

(א)  $\frac{1}{3}$       (ב)  $\frac{1}{16}$       (ג)  $\frac{1}{8}$

13. מאורע  $B$  התרחש בשני הניסויים. מצא את ההסתברות (המותנה) לכך שהמספר במשבצת עליונה ימנית הוא אותו המספר בשני הניסויים.

(א)  $\frac{1}{8}$       (ב)  $\frac{2}{3}$       (ג)  $\frac{1}{4}$

14. התרחש ששורה ראשונה בניסוי השני זהה לשורה שניה בניסוי הראשון. מצא את ההסתברות (המותנה) לכך שלפחות אחד מהמאורעות  $A, B, C$  התרחש פעמיים.

(א)  $\frac{2}{3}$       (ב)  $\frac{1}{3}$       (ג)  $\frac{1}{4}$

### סוגיה 3

$n$  ערים יכולות לשלוח נציגים לכנס. כל עיר שולחת נציג אחד או לא משתתפת, בסיכויים  $1/2, 1/2$ , באופן בלתי תלוי בערים אחרות. נציגים מגיעים בסדר מקרי. נגדיר מאורעות  
 $A$ : העיר הכי צפונית משתתפת;  
 $B$ : העיר הכי דרומית משתתפת;  
 $C$ : הנציג הראשון שהגיע הוא מהעיר הכי דרומית.  
 נניח שמספר הערים  $n = 2$ .

15. מצא את ההסתברות  $\mathbb{P}(C)$ .

(א)  $\frac{1}{2}$  (ב)  $\frac{1}{3}$  (ג)  $\frac{3}{8}$

16. מצא את ההסתברות המותנה  $\mathbb{P}(A|C)$ .

(א)  $\frac{1}{4}$  (ב)  $\frac{3}{8}$  (ג)  $\frac{1}{2}$

נניח עתה שמספר הערים  $n = 4$ . נגדיר עוד מאורע  
 $D$ : משתתפים 2 ערים בדיוק.

17. מצא  $\mathbb{P}(A|D)$ .

(א)  $\frac{1}{4}$  (ב)  $\frac{17}{45}$  (ג)  $\frac{1}{2}$

18. מצא  $\mathbb{P}(C|D)$ .

(א)  $\frac{17}{45}$  (ב)  $\frac{1}{2}$  (ג)  $\frac{1}{4}$

19. מצא  $\mathbb{P}(C)$ .

(א)  $\frac{1}{4}$  (ב)  $\frac{15}{64}$  (ג)  $\frac{17}{45}$

20. מצא  $\mathbb{P}(A|C)$ .

(א)  $\frac{15}{64}$  (ב)  $\frac{17}{45}$  (ג)  $\frac{1}{2}$

## רשימת נוסחאות

| Var ( X )   | E ( X )           | P ( X = k )  | ההתפלגות     |                               |
|---|-------------------|--|--------------|-------------------------------|
| $np(1 - p)$   | $np$              | $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$                     | $B(n, p)$    | בינומית                       |
| $\lambda$   | $\lambda$         | $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$                  | $P(\lambda)$ | פואסון                        |
| $\frac{1-p}{p^2}$   | $\frac{1}{p}$     | $p(1-p)^{k-1}$                                       | $G(p)$       | גיאומטרית                     |
| $\frac{n^2 - 1}{12}$  | $\frac{n + 1}{2}$ | $\frac{1}{n}$  | $U(n)$       | אחידה<br>ב- $\{1, \dots, n\}$ |
| $n \frac{1-p}{p^2}$   | $\frac{n}{p}$     | $\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$                   | $NB(n, p)$   | בינומית-שלילית                |
| $n \frac{RW}{(R+W)^2} \left( 1 - \frac{n-1}{R+W-1} \right)$ | $n \frac{R}{R+W}$ | $\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$ | $H(n; R, W)$ | היפרגיאומטרית                 |

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$