

סמסטר א', מועד א', תשס"ח
 תאריך הבחינה: 15.04.2008
 מספר קורס: 0365-1102

מספר מחברת _____
 מספר ת.ז. _____

בחינה במבוא להסתברות

המורים: פרופ' אהוד לרר, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
 מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
 השאלון מורכב מ-19 שאלות המבוססות על 3 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
 לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
 באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
 סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות
 זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
 הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

דוגמה:

0 -2 6 -2 -2 -4 4 0

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 114.
 לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	11	12	13	14	15
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	16	17	18	19
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

סוגיה 1

מטילים n פעמים מטבע הוגן שעל צדדיו רשומים המספרים 1 ו-0, מקבלים n מ"מ: X_1, X_2, \dots, X_n , כאשר X_i תוצאת ההטלה ה- i (0 או 1). לאחר מכן מסדרים את המטבעות בסדר אקראי מבלי להפוך את הצדדים. מקבלים n מ"מ חדשים: Y_1, Y_2, \dots, Y_n . נגדיר בנוסף את המ"מ

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Z_i = \mathbf{1}_{\{X_i=Y_i\}} \quad (i = 1, \dots, n), \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

1. ההסתברות $\mathbb{P}(Y_1 = 1)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{2n}$
(ב) $\frac{1}{2}$
(ג) $\frac{n+1}{2n}$

2. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}(Y_1 = 1 | X_1 = 1)$ שווה ל-

(א) $\frac{n+1}{2n}$
(ב) $\frac{n}{2n-1}$
(ג) אין מספיק נתונים כדי לדעת.

3. ההסתברות $\mathbb{P}(Z_1 = 1)$ שווה ל-

(א) $\frac{n-1}{2n}$
(ב) $\frac{n}{2n-1}$
(ג) $\frac{1}{2}$

4. התוחלת $\mathbb{E}(Z)$ שווה ל-

(א) $\frac{n^2}{2n-1}$
(ב) $\frac{n+1}{2}$
(ג) $\frac{n}{2}$

5. ההסתברות המותנה $\mathbb{P}(Z = n | X = k)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{n!}$
(ב) $\frac{1}{\binom{n}{k}}$
(ג) $\frac{k!}{n!}$

6. ההסתברות $\mathbb{P}(Z = n)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{n!}$
(ב) $\frac{1}{n}$
(ג) $\frac{n+1}{2^n}$

7. עבור $n = 15$ ההסתברות $\mathbb{P}(Z = 0)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{2^{15}}$
(ב) $\frac{1}{15!}$
(ג) 0

8. כאשר n שואף לאינסוף, סידרת ההסתברויות $\mathbb{P}(Z = 0)$ מתכנסת ל-

(א) 1
(ב) 0
(ג) לסידרה הנ"ל אין גבול.

9. התוחלת המותנה $\mathbb{E}(Z|X)$ שווה ל-

(א) $n \frac{(n-X)!X!}{n!}$ (ב) $\frac{n+1}{2}$ (ג) $\frac{(n-X)^2 + X^2}{n}$

10. המשתנים המקריים X, Z הם
 (א) בלתי תלויים.
 (ב) בעלי מתאם חיובי.
 (ג) בלתי מתואמים אך תלויים.

סוגיה 2

כד מכיל 10 כדורים ממוספרים. בוחרים כדור באקראי, רושמים את מספרו X . בסיכוי $\frac{1}{2}$ מחזירים את הכדור לכד (ובסיכוי $\frac{1}{2}$ משאירים אותו בחוץ). עושים כך עוד פעם, רושמים Y . ועוד פעם, רושמים Z .

11. ההסתברות $\mathbb{P}(X=Y)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{100}$ (ב) $\frac{1}{10}$ (ג) $\frac{1}{200}$

12. ההסתברות $\mathbb{P}(X=Y=Z)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{100}$ (ב) $\frac{1}{400}$ (ג) $\frac{1}{4000}$

13. ההסתברות $\mathbb{P}(X=Z)$ שווה ל-

(א) $\frac{1}{20}$ (ב) $\frac{19}{400}$ (ג) $\frac{3}{80}$

14. ההסתברות $\mathbb{P}(Y=Z)$ שווה ל-

(א) $\frac{3}{80}$ (ב) $\frac{1}{20}$ (ג) $\frac{19}{360}$

15.

- (א) המאורעות $X=Y$, $Y=Z$, $X=Z$ תלויים, אך בלתי תלויים בזוגות.
 (ב) המאורעות $X=Y$ ו- $X=Z$ תלויים, אך המאורעות $X=Y$ ו- $Y=Z$ בלתי תלויים.
 (ג) המאורעות $X=Y$ ו- $Y=Z$ תלויים, אך המאורעות $X=Y$ ו- $X=Z$ בלתי תלויים.

סוגיה 3

יהיו X, Y מ"מ.

.16

(א) אם X, Y ב"ת ו- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ אז $\text{Var}(XY) = \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$;
 התשובות (ב), (ג) אינן נכונות.

(ב) אם $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ אז $\text{Var}(XY) = \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$.

(ג) אם X, Y ב"ת אז $\text{Var}(XY) = \text{Var}(X)\text{Var}(Y)$.

יהיו X, Y, Z מ"מ ב"ת ש"ה, $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

.17

(א) $\text{Var}(XYZ) = \sigma^2(\sigma^4 + 3\sigma^2\mu^2 + 3\mu^4)$.

(ב) $\text{Var}(XYZ) = \sigma^4(\sigma^2 + 3\mu^2)$.

(ג) $\text{Var}(XYZ) = \sigma^6 - \mu^6$.

יהיו X, Y, Z מ"מ ש"ה, $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = 1)$, והמאורעות $X > 0$, $Z > 0$, $Y > 0$ בלתי תלויים בזוגות.

.18

(א) אין מספיק נתונים כדי למצוא $\mathbb{E}(X + Y + Z)$.

(ב) $\mathbb{E}(X + Y + Z) = 0$, $\text{Var}(X + Y + Z) = 9$.

(ג) $\mathbb{E}(X + Y + Z) = 0$, אך אין מספיק נתונים כדי למצוא $\text{Var}(X + Y + Z)$.

.19

(א) $\mathbb{E}(XY + YZ + XZ) = 0$, אך אין מספיק נתונים כדי למצוא $\text{Var}(XY + YZ + XZ)$.

(ב) אין מספיק נתונים כדי למצוא $\mathbb{E}(XY + YZ + XZ)$.

(ג) $\mathbb{E}(XY + YZ + XZ) = 0$, $\text{Var}(XY + YZ + XZ) = 3$.

רשימת נוסחאות

Var (X)	E (X)	P (X = k)	ההתפלגות	
$np(1 - p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
λ	λ	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2 - 1}{12}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$e^{-\lambda}$	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001