

### בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' דוד גילת, פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.

מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.

השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.

לכל שאלה ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה (הנימוק הנכון חשוב לא פחות מן התשובה המספרית).

סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.

הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
0	-2	6	-2	-2	-4	4	0

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 108.  
 לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4
א				
ב				
ג				
ד				

	5	6	7	8	9	10
א						
ב						
ג						
ד						

	11	12	13
א			
ב			
ג			
ד			

	14	15	16	17	18
א					
ב					
ג					
ד					

## סוגיה 1

במרחב הסתברות  $(\Omega, P)$  נתונים שלשה מאורעות  $A_1, A_2, A_3$  בעלי ההסתברויות  $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{5}$ ,  $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{4}$ ,  $\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}$ . נתבונן במשתנה המקרי  $N$  שהוא מספר המאורעות מבין  $A_1, A_2, A_3$  המתרחשים.

1. ההסתברות  $\mathbb{P}(N = 3)$  היא:

- (א)  $\frac{1}{40}$  (ב)  $\frac{1}{5}$  (ג) 0 (ד) אין די נתונים לחישוב הסתברות זו.

2. התוחלת של  $N$  היא:

- (א)  $\frac{3}{2}$  (ב) 1 (ג)  $\frac{19}{20}$  (ד) אין די נתונים לחישוב  $\mathbb{E}(N)$ .

3. השונות של  $N$  היא:

- (א) 1 (ב)  $\frac{239}{400}$  (ג)  $\frac{1}{25} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{141}{400}$  (ד) אין די נתונים לחישוב השונות של  $N$ .

4. מבין שלשת המצבים הבאים, השונות של  $N$  היא קטנה ביותר כאשר:

- (א)  $A_1, A_2, A_3$  בלתי תלויים.  
(ב)  $A_1, A_2, A_3$  זרים בזוגות.  
(ג)  $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ .  
(ד) אותה השונות בכל המקרים.

## סוגיה 2

קופסה מכילה מספר מקרי  $X$  של כדורים לבנים ועוד  $100 - X$  כדורים אדומים ( $0 \leq X \leq 100$ ). ההתפלגות של  $X$  לא ידועה, אך ידוע ש- $\mathbb{E}(X) = 25$ . מוציאים 2 כדורים מהכד באופן מקרי עם החזרה.

5. ההסתברות שהכדור הראשון הוא לבן היא:

- (א)  $\frac{1}{4}$  (ב)  $\frac{25! 75!}{100!}$  (ג) אי אפשר לחשב הסתברות זו בלי לדעת את הערך של  $X$ .  
(ד) כדי לחשב הסתברות זו אין צורך בערך של  $X$ , אבל דרושה ההתפלגות של  $X$ .

6. ההסתברות ששני הכדורים הם לבנים היא:

(א)  $\frac{25 \cdot 24}{100 \cdot 99}$  (ב)  $\frac{1}{16}$

(ג) אי אפשר לחשב הסתברות זו בלי לדעת את הערך של  $X$ .

(ד) כדי לחשב הסתברות זו אין צורך בערך של  $X$ , אבל דרושה ההתפלגות של  $X$ .

7. הצבעים של שני הכדורים הם בלתי תלויים:

(א) אם ורק אם ההתפלגות של  $X$  היא אחידה.

(ב) אף פעם לא.

(ג) אם ורק אם ההתפלגות של  $X$  היא מנוונת (כלומר,  $X$  קבוע).

(ד) תמיד.

8. בנוסף לתוחלת הנתונה, ידוע שהשונות של  $X$  היא 25. ההסתברות ששני הכדורים

הם לבנים היא:

(א)  $\frac{13}{200}$  (ב)  $\frac{1}{16}$

(ג) אי אפשר לחשב הסתברות זו בלי לדעת את הערך של  $X$ .

(ד) כדי לחשב הסתברות זו אין צורך בערך של  $X$ , אבל דרושה ההתפלגות של  $X$ .

9. כמו שאלה 8, אלא שהכדור השני הוצא מבלי להחזיר קודם את הראשון.

(א)  $\frac{13}{200}$  (ב)  $\frac{25}{396}$

(ג) אי אפשר לחשב הסתברות זו בלי לדעת את הערך של  $X$ .

(ד) כדי לחשב הסתברות זו אין צורך בערך של  $X$ , אבל דרושה ההתפלגות של  $X$ .

10. בהינתן התוחלת והשונות של  $X$  כנ"ל, האם יתכן ש-  $\mathbb{P}(X > 75) = \frac{1}{5}$ ?

(א) לא, מפני שהי קטנה מ-  $\frac{1}{9}$  לפי אי-שוויון מרקוב.

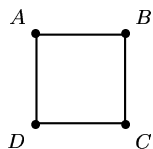
(ב) כן, מפני שהסתברות זו קטנה מ-  $\frac{1}{3}$  לפי אי-שוויון מרקוב.

(ג) לא, מפני שהיא קטנה מ-  $\frac{1}{100}$  לפי אי-שוויון צ'בישב.

(ד) אף אחד מהנ"ל.

### סוגיה 3

כל צלע בריבוע  $ABCD$  היא פתוחה או סגורה בסיכוי  $1/2$  באופן בלתי תלוי בצלעות האחרות.



11. הסיכוי שיש מסלול פתוח בין  $A$  ל- $C$  הוא:

- (א)  $\frac{7}{16}$       (ב)  $\frac{1}{2}$       (ג)  $\frac{9}{16}$       (ד) אף אחד מהנ"ל.

12. בהינתן שהמסלול  $ABC$  פתוח, הסיכוי (המותנה) שיש מסלול פתוח מ- $B$  ל- $D$

- הוא: (א)  $\frac{3}{4}$       (ב)  $\frac{5}{8}$       (ג)  $\frac{3}{8}$       (ד)  $\frac{1}{4}$

13. בהינתן שיש מסלול פתוח בין  $A$  ל- $C$ , הסיכוי (המותנה) שיש גם מסלול פתוח בין

- $B$  ל- $D$  הוא: (א)  $\frac{5}{7}$       (ב)  $\frac{3}{4}$       (ג)  $\frac{5}{16}$       (ד)  $\frac{2}{7}$

### סוגיה 4

נתונה קוביה עם פאה אחת אדומה, שתי פאות שחורות ושלוש פאות לבנות. מבצעים סדרת הטלות בלתי תלויות של הקוביה עד שמתקבלת פאה לא אדומה.

14. ההסתברות שבהטלה האחרונה התקבלה פאה לבנה היא:

- (א)  $\frac{3}{5}$       (ב)  $\frac{5}{6}$       (ג)  $\frac{1}{2}$       (ד) אף אחד מהנ"ל.

15. יהי  $S$  מספר ההטלות (המקרי) שבוצע בשאלה 14, ובסדרה נפרדת של הטלות הקוביה, יהי  $T$  מספר ההטלות עד שלראשונה מתקבלת פאה אדומה. התוחלת  $\mathbb{E}(ST)$

- היא: (א) 5      (ב)  $\frac{36}{5}$       (ג)  $\frac{25}{6}$       (ד) 36

מטילים את הקוביה מספר קבוע,  $n$ , של פעמים. יהי  $X$  מספר הפעמים שהתקבלה פאה אדומה,  $Y$  מספר הפעמים שהתקבלה פאה שחורה,  $Z$  מספר הפעמים שהתקבלה פאה לבנה.

16. השוו את השונות של  $X + Y$  ושל  $Z$  :

.  $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(Z)$  (א)

.  $\mathbb{V}(X + Y) > \mathbb{V}(Z)$  (ב)

.  $\mathbb{V}(X + Y) < \mathbb{V}(Z)$  (ג)

. ההשוואה תלויה ב-  $n$  (ד)

.....

17. מקדם המתאם  $r(X, Y)$  הוא:

.  $-\frac{1}{10}$  (א) .  $+\frac{1}{\sqrt{10}}$  (ב) .  $-\frac{1}{\sqrt{10}}$  (א)

. תלוי ב-  $n$  (ד)

.....

18. השונות של  $X - Y$  היא:

.  $\frac{17}{36}n^2$  (א) .  $\frac{n}{4}$  (ב) .  $\frac{17}{36}n$  (א)

. לא תלויה ב-  $n$  (ד)



## רשימת נוסחאות

$\mathbb{V}(X)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$	ההתפלגות	
$np(1-p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$p(1-p)^{k-1}$	$G(p)$	גיאומטרית
$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה $\{1, \dots, n\}$ -ב
$n \frac{1-p}{p^2}$	$\frac{n}{p}$	$\binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(Y|X)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$