

**בחינה במבוא להסתברות**  
 המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.  
 מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.  
 השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.  
 לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.  
 באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).  
 סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות  
 זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.  
 הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
0	-2	6	-2	-2	-4	4	0

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.  
 לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4		5	6	7	8	9
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

  

	10	11	12	13	14	15	16	17	18		19	20
א	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ב	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ג	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ד	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

## סוגיה 1

כד מכיל 15 כדורים לבנים ו-5 כדורים שחורים. בוחרים באופן מקרי מדגם בגודל 10 עם החזרה. יהיו

$X_1$  - מספר כדורים לבנים במדגם (לאו דווקא שונים),

$X_2$  - מספר כדורים שחורים במדגם (לאו דווקא שונים),

$$, (-1)^{X_1} = Y_1$$

$$, (-1)^{X_2} = Y_2$$

$E_1$  - המאורע " $X_1$  הוא מספר זוגי",

$E_2$  - המאורע " $X_2$  הוא מספר זוגי".

1. מקדם המתאם בין  $X_1$  ל- $X_2$  הוא

(א)  $R(X_1, X_2) = +1$

(ב)  $R(X_1, X_2) = 0$

(ג)  $R(X_1, X_2) = -1$

2. מקדם המתאם בין  $Y_1$  ל- $Y_2$  הוא

(א)  $R(Y_1, Y_2) = 0$

(ב)  $R(Y_1, Y_2) = -1$

(ג)  $R(Y_1, Y_2) = +1$

3. התוחלת של  $Y_1$  היא

(א)  $\mathbb{E}(Y_1) = (-1)^{3/4}$

(ב)  $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{3^{10}}$

(ג)  $\mathbb{E}(Y_1) = 0$

רמז:  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$  לכל  $a, b$ , חיוביים או שליליים. (יש גם דרך אחרת).

4. ההסתברות של  $E_1$  היא

(א)  $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^{10}})$

(ב)  $\mathbb{P}(E_1) < 0.5$

(ג)  $\mathbb{P}(E_1) = 0.5$

## סוגיה 2

כד מכיל 10 כדורים לבנים, 10 כדורים אדומים ו- 10 כדורים שחורים. בוחרים באופן מקרי מדגם בגודל 4 עם החזרה. יהיו

- $X_1$  - מספר כדורים לבנים במדגם (לאו דווקא שונים),
- $X_2$  - מספר כדורים אדומים במדגם (לאו דווקא שונים),
- $X_3$  - מספר כדורים שחורים במדגם (לאו דווקא שונים),
- $Y_k = (-1)^{X_k}$  (עבור  $k = 1, 2, 3$ ),
- $E_k$  - המאורע " $X_k$  הוא מספר זוגי" (עבור  $k = 1, 2, 3$ ).

5. מקדם המתאם בין  $X_1$  ל-  $X_2$  הוא

(א)  $R(X_1, X_2) = 0$

(ב)  $R(X_1, X_2) = -1/2$

(ג)  $R(X_1, X_2) = -1/3$

רמז: התבוננו (י) ב-  $\mathbb{V}(X_1 + X_2 + X_3)$ .

6. התוחלת של  $Y_1$  היא

(א)  $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{16}$

(ב)  $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{81}$

(ג)  $\mathbb{E}(Y_1) = 0$

7.

(א)  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = (\mathbb{E}(Y_1))(\mathbb{E}(Y_2))$

(ב)  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = 0$

(ג)  $\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = \mathbb{E}(Y_1)$

8. נתבונן בשונות המשותפת של  $Y_1$  ו-  $Y_2$ .

(א)  $\text{Cov}(Y_1, Y_2) < 0$

(ב)  $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 1$

(ג)  $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$

9.

(א)  $\mathbb{P}(E_2 | E_1) > \mathbb{P}(E_2)$

(ב) המאורעות  $E_1, E_2$  ב"ת.

(ג) המאורעות  $E_1, E_2$  זרים.

### סוגיה 3

יהי  $(X_1, \dots, X_{10})$  מדגם סדור בגודל 10 מתוך  $\{-9, -8, \dots, -1, 0, 1, \dots, 8, 9\}$ .  
 נתבונן במ"מ

$$X_1^2 + \dots + X_{10}^2 = Y$$

$$X_1 \dots X_{10} = Z$$

ומאורעות

$$A : Y = 0$$

$$B : Z = 0$$

$$C : Z > 0$$

$$D : Z = 1$$

$$E_k : \frac{Z}{k} \text{ הוא מספר שלם.}$$

10. ההסתברות  $\mathbb{P}(A)$  שווה ל-

(א) אם המדגם עם החזרה אז  $\frac{1}{19^{10}}$ ,

ואם המדגם ללא החזרה אז  $\frac{9!10!}{19!}$ .

(ב) אם המדגם עם החזרה אז  $\frac{19!}{9!10!}$ ,

ואם המדגם ללא החזרה אז 0.

(ג) אם המדגם עם החזרה אז  $\frac{1}{19^{10}}$ ,

ואם המדגם ללא החזרה אז 0.

11. ההסתברות  $\mathbb{P}(B)$  שווה ל-

(א) אם המדגם עם החזרה אז  $\frac{1}{2 \cdot 9^{10} + 1}$ ,

ואם המדגם ללא החזרה אז  $\frac{1}{2(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)^2 + 1}$ .

(ב) אם המדגם עם החזרה אז  $1 - \frac{18^{10}}{19^{10}}$ ,

ואם המדגם ללא החזרה אז  $\frac{10}{19}$ .

(ג)  $\frac{10}{19}$ .

12. אם המדגם עם החזרה אז ההסתברות  $\mathbb{P}(C)$  שווה ל-

(א)  $\frac{9^{10}}{19^{10}}$ .

(ב)  $\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{19^{10}} \right)$ .

(ג)  $\frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(B))$ .

.....  
13. ההסתברות  $\mathbb{P}(D)$  שווה ל-

(א)  $\mathbb{P}(B)$  . (ב)  $\frac{2^{10}}{2 \cdot 19^{10}}$  (ג) 0 .

.....

14. ההסתברות  $\mathbb{P}(E_2)$  שווה ל-

(א)  $10\mathbb{P}(X_1 \text{ זוגי})$  .

(ב)  $\frac{1}{2}$

(ג) אם המדגם עם החזרה אז  $1 - \frac{10^{10}}{19^{10}}$  ,

ואם המדגם ללא החזרה אז  $1 - \frac{9!10!}{19!}$  .

.....

15.

(א)  $\mathbb{P}(E_5) = \mathbb{P}(E_7) < \mathbb{P}(E_9)$  .

(ב)  $\mathbb{P}(E_5) = \mathbb{P}(E_7) = \mathbb{P}(E_9)$  .

(ג)  $\mathbb{P}(E_5) > \mathbb{P}(E_7) > \mathbb{P}(E_9)$  .

.....

16. אם המדגם עם החזרה אז

(א)  $\mathbb{P}(C \cap E_2 | \overline{B}) = \mathbb{P}(C | \overline{B}) \mathbb{P}(E_2 | \overline{B})$  .

(ב)  $\mathbb{P}(C \cap E_2) > \mathbb{P}(C) \mathbb{P}(E_2)$  .

(ג)  $\mathbb{P}(C \cap E_2) = \mathbb{P}(C) \mathbb{P}(E_2)$  .

.....

17. ההסתברות  $\mathbb{P}(\overline{E_5 \cup E_7})$  לכך שאף אחד מ-  $E_5, E_7$  לא יתרחש, היא שווה ל-

(א) אם המדגם עם החזרה אז  $\frac{13^{10}}{9!13!}$  ,

ואם המדגם ללא החזרה אז  $\frac{3!19!}{14^{10}}$  .

(ב) אם המדגם עם החזרה אז  $\frac{19^{10}}{9!14!}$  ,

ואם המדגם ללא החזרה אז  $\frac{4!19!}{14^{10}}$  .

(ג)  $1 - \mathbb{P}(E_5) - \mathbb{P}(E_7) + \mathbb{P}(E_5) \mathbb{P}(E_7)$  .

.....

18. המאורעות  $E_5$  ו-  $E_7$  הם

(א) אם המדגם עם החזרה אז בלתי תלויים ,

ואם המדגם ללא החזרה אז תלויים .

(ב) בלתי תלויים .

(ג) תלויים .

---

---

#### סוגיה 4

מטילים מטבע הוגן אד שנקבל 100 פעמים "ראש".  
יהי  $X$  מספר הפעמים שמתקבל "זנב".

- 
19. מצא חסם עליון להסתברות ש-  $X \geq 1000$ .  
(א)  $\mathbb{P}(X \geq 1000) = 0$ , מפני ש-  $X$  מקבל ערכים  $0, 1, \dots, 100$  בלבד.  
(ב) לפי אי-שוויון Chebyshev  $\mathbb{P}(X \geq 1000) \leq \frac{1}{8100}$   
(ג) לפי אי-שוויון Markov  $\mathbb{P}(X \geq 1000) \leq 0.1$
- .....

20. מצא קירוב נורמלי להסתברות ש-  $X \geq 80$ .  
(א)  $\mathbb{P}(X \geq 80) \approx 0.84$   
(ב)  $\mathbb{P}(X \geq 80) \approx 0.98$   
(ג)  $\mathbb{P}(X \geq 80) \approx 0.92$
- 
- 
-

## רשימת נוסחאות

$\mathbb{V}(X)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$	ההתפלגות	
$np(1-p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
$\lambda$	$\lambda$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$P(\lambda)$	פואסון
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1-p}{p}$	$p(1-p)^k$	$G(p)$	גיאומטרית המתחילה ב-0
$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$n \frac{1-p}{p}$	$\binom{k+n-1}{n-1} p^n (1-p)^k$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית המתחילה ב-0
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(Y|X)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$