סמסטר ב', מועד א', תשס"ב
תאריך הבחינה: 01.07.2002
מספר קורס: 0365-2100

בחינה בהסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, טבלת אינטגרלים ובמחשבון.
סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120 (הציון לא יעלה על 100). בספק אם במסגרת הזמן הנתון ייתאפשר לענות על כל השאלות. לפיכך כדאי לעיין בכל השאלות בטרם ניגשים לפתרונן.

בהצלחה!

שאלה 1

=50

בחור ובחורה נדברו להפגש בין השעות 7–8. זמן ההגעה של כ"א מהם הוא אחיד בין 7–8 והם ב"ת זה בזה.
יהי $7+X$ זמן ההגעה של הבחורה, $7+Y$ – של הבחור.
נגדיר מאורעות $A=\{X<Y\}$, $B=\{|X-Y|<\frac{1}{3}\}$.

---

6 (א) מצא את המספרים $\mathbb{P}\left(A\right)$, $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X=\frac{1}{6}\right)$ ואת המשתנה המקרי $\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X\right)$.
וודא שמתקיים $\mathbb{P}\left(A\right)=\mathbb{E}\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X\right)$.

....

5 (ב) מצא את $\mathbb{P}\left(B\right)$ ואת $\mathbb{P}\left(A\cap B\right)$. האם A,B ב"ת?

....

6 (ג) מצא את $\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, X=\frac{1}{6}\right)$ ו– $\mathbb{P}\left(A\cap B \,\middle|\, X=\frac{1}{6}\right)$.
האם $\mathbb{P}\left(A\cap B \,\middle|\, X=\frac{1}{6}\right)=\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X=\frac{1}{6}\right)\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, X=\frac{1}{6}\right)$?

....

12 (ד) מצא את כל x כאלה ש–

$\mathbb{P}\left(A\cap B \,\middle|\, X=x\right)<\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X=x\right)\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, X=x\right)$,
$\mathbb{P}\left(A\cap B \,\middle|\, X=x\right)=\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X=x\right)\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, X=x\right)$,
$\mathbb{P}\left(A\cap B \,\middle|\, X=x\right)>\mathbb{P}\left(A \,\middle|\, X=x\right)\mathbb{P}\left(B \,\middle|\, X=x\right)$.

....

6 (ה) מצא את הצפיפויות המותנות $f_{X|A}$, $f_{Y|A}$.

....

5 (ו) מצא את התוחלות המותנות $\mathbb{E}\left(X \,\middle|\, A\right)$, $\mathbb{E}\left(Y \,\middle|\, A\right)$.

....

10 (ז) מצא את הצפיפות המותנה הדו–ממדית $f_{X,Y|A}$.
האם $f_{X,Y|A}(x,y)=f_{X|A}(x)f_{Y|A}(y)$?

שאלה 2

=25

יהי X מ"מ אינטגרבילי. נתבון בפונקציה

$$U(t) = \mathbb{E}|X - t|\,.$$

---

10 (א) הוכח שלכל $s < t$,

$$\underbrace{2F_X(s) - 1}_{\mathbb{P}(X \le s) - \mathbb{P}(X > s)} \le \frac{U(t) - U(s)}{t - s} \le \underbrace{2F_X(t-) - 1}_{\mathbb{P}(X < t) - \mathbb{P}(X \ge t)}\,.$$

רמז: חשוב על הפונקציה $\dfrac{|x-t| - |x-s|}{t-s}$ של x .

....

8 (ב) הוכח שבכל נקודת רציפות t של F_X , פונקציה U גזירה, ו–

$$U'(t) = \mathbb{P}\left(X < t \right) - \mathbb{P}\left(X > t \right) = 2F_X(t) - 1\,.$$

....

7 (ג) נניח שיש ל– X צפיפות f_X . הוכח שבכל נקודת רציפות t של f_X , פונקציה U' גזירה, ו–

$$U''(t) = 2f_X(t)\,.$$

שאלה 3

=45

יהי $X : \Omega \to [0, \infty)$ מ"מ, $A \subset \Omega$ מאורע. נתבונן בפונקציה $Y : \Omega \to [0, \infty)$,

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

---

6 (א) הוכח ש– Y הוא מ"מ.

....

9 (ב) הוכח ש– $Y^* \le X^*$.

....

9 (ג) הוכח ש– $Y^*(p) = 0$ לכל $p \in \big(0, 1 - \mathbb{P}(A)\big)$.

6 (ד) הוכח ש−

$$\mathbb{E}Y \le \int_{1-\mathbb{P}(A)}^{1} X^*(p)\, dp\, .$$

7 (ה) הוכח את אי−שויון (ד) עבור $X:\Omega\to[-100,\infty)$.
רמז: הצב $X+100$ ל−(ד).

8 (ו) הכלל את (ה) ל− $X:\Omega\to\mathbb{R}$.