סמסטר ב׳, מועד ב׳, תשע״ד
תאריך הבחינה: 19.09.2014
מספר קורס: 0366-2180

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי 4

המורה: פרופ׳ בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

מצאו את האינטגרל

$$\iint_{x>0,y>0,x^2+y^2<1} x^{a-1}y^{b-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

עבור $a,b\in(0,\infty)$. (צריך לאמת כל שלב.)

שאלה 2

=40

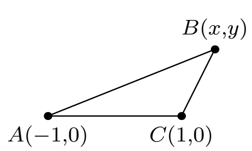
נתבונן בחד–תבנית $\omega = f\,dx + g\,dy$ המוגדרת בתחום $G=\mathbb{R}^2\setminus([-1,1]\times\{0\})$ ע״י

$$\begin{cases} f(x,y)=\theta, \\ g(x,y)=\log r \end{cases} \quad \text{עבור} \quad \frac{x+\mathrm{i}y-1}{x+\mathrm{i}y+1}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

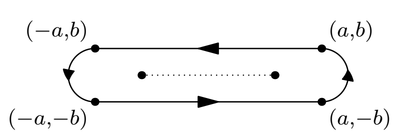
$0<r<\infty$, $-\pi<\theta<\pi$.

$\theta=\pm\angle ABC$

$r=\frac{|BC|}{|AB|}$



(א) עבור הלולאה $\gamma_{a,b}$ הבאה



(שני קטעים ישרים ושני חצאי מעגל) הוכיחו כי

$$\int_{\gamma_{a,b}}\omega\to -4\pi \quad \text{כאשר} \quad b\to 0+$$

לכל $a \in (1,\infty)$.
רמז: אין צורך למצוא את האינטגרל.

(ב) הוכיחו כי
$$\int_{\gamma_{a,b}} \omega = -4\pi$$
לכל $a \in (1,\infty)$, $b > 0$.
רמז: $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ לפי Cauchy-Riemann. אין צורך להוכיח את זה.

(ג) הוכיחו כי $-\frac{1}{2}\int_\gamma \omega$ שווה למספר הפיתול (winding number) של γ סביב 0 לכל לולאה γ בתחום G .

שאלה 3

=35

למדנו בכיתה כי שדה וקטורי $F : G \to \mathbb{R}^3$ בתחום $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ המוגדר ע"י
$$F(x) = \frac{x}{|x|^3}$$
מקיים (בתחום G) $\operatorname{div} F = 0$ ו- $F = -\nabla U$ כאשר $U(x) = \frac{1}{|x|}$.

(א) כתבו במפורש את חד-התבנית ω_1 ואת דו-התבנית ω_2 המתאימות לשדה הוקטורי F , ותרגמו את העובדות " $\operatorname{div} F = 0$ "," $F = -\nabla U$ " לשפה של תבניות דיפרנציאליות.

(ב) האם ω_1 סגורה? האם ω_1 מדויקת? האם ω_2 סגורה? האם ω_2 מדויקת? (הוכיחו.)
רמז: חשבו על האינטגרל של ω_2 על ספירה.

שאלה 4

=35

תהי $M \subset \mathbb{R}^N$ יריעה n-ממדית, $n < N$, ו- $x_0 \in M$. הוכיחו:

(א) אם x_0 היא נקודת קיצון מקומית ב- M של פונקציה $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ אז
$$\forall h \in T_{x_0}M \quad (Df)_{x_0}h = 0\,.$$

(ב) קיימת $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ כך ש- x_0 היא נקודת קיצון מקומית ב- M של f אך $(Df)_{x_0} \neq 0$.