

סמסטר ב', מועד ב', תשע"ה
תאריך הבחינה: 08.09.2015
מספר קורס: 0366-2180

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4
המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

הוכיחו קיום של קבוע $c \in (0, \infty)$ כך שלכל פונקציה רציפה $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ בעלת תומך קומפקטי (בתוך $(0, \infty)$) מתקיים

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x^2 + y^4 + z^6) dx dy dz = c \int_0^\infty \frac{f(u)}{u^{1/12}} du.$$

(אין צורך לחשב את c).
רמז: ראשית, נתבונן ב- $f = \mathbf{1}_{(0,a)}$.

שאלה 2

=35

תהי $\gamma \in C^2([a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ כך ש- $|\gamma'(t)| = 1$ לכל t .

נגדיר $\psi : (0, 1) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ע"י

$$\psi(s, t) = \gamma(t) + s\gamma'(t).$$

בהנחה שהקבוצה $M = \psi((0, 1) \times (a, b))$ היא יריעה 2-ממדית ב- \mathbb{R}^n ו-
 $(\psi, (0, 1) \times (a, b))$ היא מפה של M , הוכיחו:

(א) היעקוביאן (המוכלל) J_ψ הוא כזה ש- $\frac{1}{s} J_\psi(s, t)$ לא תלוי ב- s ;

(ב) השטח של המשטח $M_r = \psi((0, r) \times (a, b))$ הוא יחסי ל- r^2 (עבור $0 < r < 1$).

שאלה 3

=35

יהי $F \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ שדה וקטורי כך ש- $\operatorname{div} F(x) = 0$ לכל x , וקיים $p > 0$ כך ש- $F(x) = o(1/|x|^p)$ עבור $|x| \rightarrow 0$, ו- $F(x) = O(1/|x|^p)$ עבור $|x| \rightarrow \infty$. הוכיחו כי השטף של F דרך הספירה $|x| = 1$ שווה ל-0.

שאלה 4

=30

תהי ω 2-תבנית ב- \mathbb{R}^n , חלקה C^1 , ו- $h \in \mathbb{R}^n$ נגדיר

$$\alpha(\cdot, h_1, h_2) = D_h \omega(\cdot, h_1, h_2), \quad \beta(\cdot, h_1, h_2, h_3) = D_{h_1} \omega(\cdot, h_2, h_3)$$

עבור $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}^n$.
הוכיחו או הפריכו:

(א) α היא 2-תבנית ב- \mathbb{R}^n ;

.....
(ב) β היא 3-תבנית ב- \mathbb{R}^n .
