סמסטר ב', מועד דוגמה, תשע"ה
תאריך הבחינה: 2015
מספר קורס: 0366-2180

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=35

נתבונן בקבוצה פתוחה $G = \{(x_1,\dots,x_n) : x_1 > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ובספירות $M_r = \{(x_1,\dots,x_n) : (x_1-r)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^n$. הוכיחו:

(א)

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r \int_{M_r \cap G} f = \int_G f(x) \frac{|x|^2}{2x_1^2} \,\mathrm{d}x$$

לכל פונקציה רציפה $f : G \to \mathbb{R}$ בעלת תומך קומפקטי (בתוך G).

....

(ב)

$$\int_G \frac{1}{x_1} f\Big(\frac{|x|^2}{2x_1}\Big) \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty r^{n-2} f(r) \mathrm{d}r$$

לכל פונקציה רציפה $f : (0,\infty) \to [0,\infty)$. (האינטגרלים לא אמיתיים, אולי מתבדרים.)

שאלה 2

=35

תהי $\gamma \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^2\big)$ כך ש- $|\gamma(t)| > 0$ ו- $|\gamma'(t)| = 1$ לכל t.
נסמן $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ ונגדיר $\psi : (a,b) \times (0,1) \to \mathbb{R}^3$ ע"י

$$\psi(t,u) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos u - \gamma_2(t)\sin u \\ \gamma_1(t)\sin u + \gamma_2(t)\cos u \\ u \end{pmatrix} .$$

הוכיחו:

(א) הקבוצה $M = \psi\big((a,b) \times (0,1)\big)$ היא יריעה 2-ממדית ב- $\mathbb{R}^3$; ψ היא מפה של M; והיעקוביאן (המוכלל) הוא

$$J_\psi(t,u) = \sqrt{1 + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle^2} \le 1 + |\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle| .$$

רמז: $(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2) = (\gamma_1\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1')^2 + (\gamma_1\gamma_1' + \gamma_2\gamma_2')^2$.

....

(ב) השטח S של המשטח M מקיים

$$S \le L + V$$

כאשר L הוא האורך של העקומה $\gamma(a,b)$, ו– V היא ההשתנות של הפונקציה $\frac{1}{2}|\cdot|^2$ בעקומה הזאת, כלומר,

$$V = \int_a^b \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} |\gamma(t)|^2 \Big| \, \mathrm{d}t \, .$$

....

(ג) השוויון $S = L + V$ מתקיים אם ורק אם $V = 0$.

שאלה 3

=35

נניח כי שדה וקטורי $F \in C^1(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ מקיים

$$\forall x, y, z \quad |zF(x,y,z)| \le 1 \, ;$$

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = O\Big(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{0.6}} \Big) \qquad (x^2+y^2+z^2 \to \infty) \, .$$

(א) נתבונן בשטף של F דרך המשטח הגלילי

$$x^2 + y^2 = 1 \, , \quad |z| < C \, .$$

הוכיחו כי השטף מתכנס כאשר $C \to +\infty$.

....

(ב) נתבונן בשטף של F דרך חצי של המשטח הגלילי:

$$x^2 + y^2 = 1 \, , \quad |z| < C \, , \quad y > 0 \, .$$

יתכן כי השטף מתבדר כאשר $C \to +\infty$. מצאו דוגמה נגדית.

שאלה 4

=30

נגדיר $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ע"י

$$\psi(t) = \Big(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \Big) \, .$$

הוכיחו או הפריכו:

(א) הקבוצה $M = \psi(\mathbb{R})$ היא יריעה, ו– $(\mathbb{R}, \psi)$ זאת מפה של M;

....

(ב) קיימת מפה של M בסביבה של $(0,0)$.