סמסטר א', מועד דוגמה, תשע"ו
תאריך הבחינה: 2016
מספר קורס: 0366-2180

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סיכום אישי.
בחרו 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

בהצלחה!

שאלה 1

=40

נתבונן בספירה $S = \{(a,b,c) : a^2+b^2+c^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ ובהעתקה φ מ-S למרחב 6-ממדי של מטריצות סימטריות,

$$\varphi(a,b,c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix} .$$

ידוע לנו כי הקבוצה $M = \varphi(S)$ היא יריעה דו-ממדית.

(א) הוכיחו כי $\varphi \in C^1(S \to M)$.

....

(ב) עבור $x = (1,0,0) \in S$ ו- $y = \varphi(x) \in M$ מצאו את $(D\varphi)_x : T_xS \to T_yM$.

....

(ג) נתבונן בדו-תבנית μ ב-S,

$$\mu(x,h,k) = \det(x,h,k)$$

עבור $x \in S$ ו- $h,k \in T_xS$.
האם קיימת דו-תבנית ω ב-M כזאת ש- $\varphi^*\omega = \mu$?
רמז: $(D\varphi)_{(-x)}$.

שאלה 2

=40

נניח כי שדה וקטורי $F \in C^1(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ מקיים

$$\forall x,y,z \quad |zF(x,y,z)| \le 1\,;$$
$$\operatorname{div} F(x,y,z) = O\Big(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{0.6}}\Big) \qquad (x^2+y^2+z^2 \to \infty)\,.$$

(א) נתבונן בשטף של F דרך המשטח הגלילי

$$x^2+y^2=1\,, \quad |z|<C\,.$$

הוכיחו כי השטף מתכנס (לגבול סופי) כאשר $C \to +\infty$.

....

(ב) נתבונן בשטף של F דרך חצי של המשטח הגלילי:

$$x^2+y^2=1\,, \quad |z|<C\,, \quad y>0\,.$$

יתכן כי השטף מתבדר כאשר $C \to +\infty$. מצאו דוגמה נגדית.

שאלה 3

=40

תהי $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ פונקציה הרמונית, עולה ב-z
(כלומר, $z_1 \le z_2 \implies u(x,y,z_1) \le u(x,y,z_2)$).
הוכיחו קיום של $c \in [0,\infty)$ ופונקציה הרמונית $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ כך ש-
$u(x,y,z) = v(x,y) + cz$ לכל x,y,z.

רמז: $u(x,y,z+a) - u(x,y,z)$.

שאלה 4

=40

נניח כי הפונקציות $\varphi_1,\dots,\varphi_{N-1} \in C^1(\mathbb{R}^N)$ ויריעה $(N-1)$-ממדית $M \subset \mathbb{R}^N$ מקיימות $\big(\varphi_1(x)\big)^{2015} + \dots + \big(\varphi_{N-1}(x)\big)^{2015} = 0$ לכל $x \in M$.
הוכיחו כי

$$\int_M d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{N-1} = 0\,.$$
