טופולוגיה – פתרונות לתרגיל 1

① א. לא טופולוגיה; למשל $X \notin \Omega$ ($X^c=\phi$ אינה קב' אינסופית).
גם תנאי' סגירות לאיחוד לא מתקיים.

ב. כן טופולוגיה: $X,\phi\in\Omega$. עבור חיתוך סופי של $U_1,\dots,U_n\in\Omega$, אם ϕ משתתפת בחיתוך אז $\bigcap_{k=1}^{n} U_k=\phi\in\Omega$, ואחרת $U_k=B(0,r_k)$ ולכן $\bigcap_{k=1}^{n} U_k = B(0,\min_{1\le k\le n} r_k)\in\Omega$. עבור איחוד כלשהו, נניח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\Omega$, ונניח ש-$X$ לא משתתף באיחוד. אז $\bigcup U_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}B(0,r_\alpha)=B(0,\sup_{\alpha\in I} r_\alpha)\in\Omega$

מוכיחים הכלה דו כוונית מהגדרה של כדור.

ג. לא טופולוגיה: אין סגירות לאיחוד. נקח למשל $U_n=\overline{B}(0,1-\frac{1}{n})$
אז $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(0,1-\frac{1}{n})=B(0,1)\notin\Omega$.

ד. כן טופולוגיה. (בדיקה ישירה וסופית...)

② א. זהו בסיס לפי "מבחן הבסיס": (1) $\bigcup_{a<b}[a,b)=\mathbb{R}$; (2) אם $[a_1,b_1),[a_2,b_2)\in\Sigma$
ונניח $x\in[a_1,b_1)\cap[a_2,b_2)$, אז $V=[\max(a_1,a_2),\min(b_1,b_2))\in\Sigma$ מקיים
$x\in V\subseteq[a_1,b_1)\cap[a_2,b_2)$.

ב. (a,b) פתוחה כי היא בטופולוגיה. נראה שהמשלים גם פתוח:
$[b,\infty)=\bigcup_{t>b}[b,t)$ לכן פתוח, וגם $(-\infty,a)=\bigcup_{t<a}[t,a)$ פתוח.

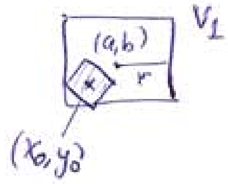
ג. לפי מבחן העידון (בקמ"מ): לכל קב' בסיס רגילה $x\in(a,b)$, קיימת קב' בסיס מהטופ' שלנו $[c,b)\in\Sigma$ כך ש-$x\in[c,b)\subseteq(a,b)$ (למשל $c=x$).
לכן הטופ' שלנו עדינה יותר מהרגילה, אין שוויון כי $[a,b)$ לא פתוחה ברגילה.
מצד שני, לכל קב' בסיס מ-Σ, $x\in[a,b)$, קיימת קב' בסיס מהטופ' הדיסקרטית $\{x\}$ כך ש-$x\in\{x\}\subseteq[a,b)$. לכן הטופ' שלנו גסה מהדיסקרטית.
הטופולוגיות לא שוות כי לא ניתן להפעיל את המבחן בכיוון ההפוך:
$\{x\}$ קב' בסיס של הטופ' הדיסקרטית, $x\in\{x\}$, אבל אין קב' בסיס מ-Σ $V\in\Sigma$
כך ש-$x\in V\subseteq\{x\}$.

③ א. יחידון $\{a\}$ הוא קב' פתוחה מהגדרת טופ' דיסקרטית. וגם קבוצה סגורה
כי המשלים $X\setminus\{a\}=\bigcup_{\forall x\neq a}\{x\}$ פתוח.

ג. נעבוד לפי אחת ההגדרות לבסיס: Σ בסיס ל-Ω אם לכל קב' U ב-Ω ונקודה $x\in U$ קיימת $V\in\Sigma$ כך ש- $x\in V\subseteq U$.
כאן $\Omega=2^X$, ולכל $x\in U$ כנ"ל ניתן לבחור $V=\{x\}\in\Sigma$ שמקיים את ההגדרה: $x\in\{x\}\subseteq U$.

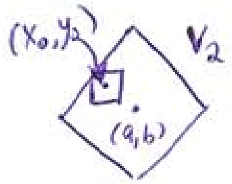
(4) הטופ' הקו-סופית על $\mathbb{R}$ היא גסה יותר מהטופ' הרגילה:
אם $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה בטופ' הקו-סופית, אז $U=(-\infty,x_1)\cup(x_1,x_2)\cup\ldots$
$\cup(x_{n-1},x_n)\cup(x_n,\infty)$
כי הרי $\mathbb{R}\setminus U=\{x_1,\ldots,x_n\}$ קב' סופית. אך מכאן ברור ש-U פתוחה בטופ' הרגילה, כאיחוד קטעים פתוחים. מצד שני, היא אינה שווה לטופ' הרגילה, כי $(0,1)$ פתוחה ברגילה ואינה פתוחה בה [$\mathbb{R}\setminus(0,1)\Rightarrow$ אינסופית].

(5) (דומה לנעשה בכיתה עם כדורים וריבועים.)
נעבוד לפי מבחן העידון: תהי $V_1\in B_1$, $(x_0,y_0)\in V_1$.



V_1 מהצורה $V_1=\{(x,y)\mid \max(|x-a|,|y-b|)<r\}$.
נסמן $r_2=r-\max(|x_0-a|,|y_0-b|)$. נגדיר
$$(x_0,y_0)\in V_2=\{(x,y)\mid\ |x-x_0|+|y-y_0|<r_2\}\in B_2$$
אז ניתן להוכיח ש- $V_2\subseteq V_1$. ואכן, אם $(x,y)\in V_2$ אז
$$|x-a|\le|x-x_0|+|x_0-a|<r_2+\max(|x_0-a|,|y_0-b|)=r.$$
ובדומה $|y-b|<r$, ולכן $\max(|x-a|,|y-b|)<r \Leftarrow (x,y)\in V_1$.

להיפך: תהי $V_2\in B_2$, $(x_0,y_0)\in V_2$. V_2 מהצורה



$$V_2=\{(x,y)\mid\ |x-a|+|y-b|<r\}$$
נסמן $r_2=r-(|x_0-a|+|y_0-b|)$. נגדיר
$$(x_0,y_0)\in V_1=\{(x,y):\ \max(|x-x_0|,|y-y_0|)<r_2/2\}\in B_1$$
ניתן להוכיח ש- $V_1\subseteq V_2$. ואכן, אם $(x,y)\in V_1$ אז
$$|x-a|+|y-b|\le|x-x_0|+|x_0-a|+|y-y_0|+|y_0-b|$$
$$<\frac{r_2}{2}+\frac{r_2}{2}+|x_0-a|+|y_0-b|=r$$
ולכן $(x,y)\in V_2$.

הראינו שכל אחד מהבסיסים מעדן את השני, ולכן הם יוצרים טופולוגיות שקולות.