פתרון תרגיל 3 בטופולוגיה

① (א) $A\subset\bar{A}$, $B\subset\bar{B}$ ⇐ $A\cap B\subset\bar{A}\cap\bar{B}$. $\bar{A}\cap\bar{B}$ היא קבוצה סגורה,
אבל $\overline{A\cap B}$ היא הקב' הסגורה הקטנה ביותר (ביחס להכלה) המכילה
את $A\cap B$, כלומר $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$.

[אפשר גם דרך סביבות... כלומר מהגדרות שקולות]

ההכלה אינה חריפה: $\bar{\mathbb{Q}}\cap\overline{\mathbb{Q}^c}=\mathbb{R}$
(ב- $\mathbb{R}$ הסטנדרטית) $\overline{\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}^c}=\emptyset$

(ב) כמו קודם, ברור ש- $A\cup B\subseteq\bar{A}\cup\bar{B}$ ⇐ $\overline{A\cup B}\subseteq\bar{A}\cup\bar{B}$.
להיפך, כיוון ש- $\overline{A\cup B}\supseteq A,B$ ⇐ $\overline{A\cup B}\supseteq\bar{A},\bar{B}$ ולכן
$\overline{A\cup B}\supseteq\bar{A}\cup\bar{B}$ (תורת הקבוצות...).

② א. $\bar{\mathbb{N}}=\mathbb{N}$ (לכל $x\notin\mathbb{N}$ הסביבה $[x,\lceil x\rceil)$ זרה ל- $\mathbb{N}$)

ב. $Int(0,1)=(0,1)$ (זו קב' פתוחה גם בטופ' זו: $(0,1)=\bigcup_{\varepsilon>0}[\varepsilon,1)$)

ג. $\partial[0,1]=\{1\}$. הסבר:

$$\partial[0,1]=\underbrace{\overline{[0,1]}}_{=[0,1]}\setminus\underbrace{Int[0,1]}_{=[0,1)}=\{1\}$$

המשלים פתוח ; קב' פתוחה מקסימלית...

③ א.

$$Cl_A B=\bigcap\{\underbrace{F\cap A}_{\text{קב' סגורה כללית ב-}A}\mid F \text{ סגורה ב- } X,\ B\subseteq F\}=\bigcap\{F\mid F \text{ סגורה ב- } X,\ B\subseteq F\}\cap A=Cl_X B\cap A$$

תורת הקבוצות
מותר להכל כי כולם נחתכים
עם A.

ב. לא נכון תמיד: למשל, אם נקח $A=B$ ונבדוק האם
$Int_A A\overset{?}{=}Int_X A\cap A$ ⟺ $A\overset{?}{=}Int_X A$ וזה נכון רק ל-A פתוחה.

④ (א) די להוכיח לחיתוך של 2 קבוצות (ולעבור באינדוקציה).
A,B דלילות ⇐ $Int(A^c),Int(B^c)$ צפופות. צ"ל ש- $Int((A\cup B)^c)=Int(A^c\cap B^c)$
צפופה. מתקיים ש- $Int(A^c\cap B^c)\supseteq Int(A^c)\cap Int(B^c)$

(למעשה יש שוויון אבל נזדקק רק לצד זה)
לקחת משלים על ① ב

כעת, לכל U פתוחה:

$$U \cap Int(A^c \cap B^c) \supseteq \underbrace{U \cap Int(A^c)} \cap Int(B^c) =$$ פתוחה לא ריקה

קב' פתוחה לא ריקה, כי $Int(A^c)$ צפופה

קב' פתוחה $\neq \emptyset$ כי $Int(B^c)$ צפופה

לכן $Int((A \cup B)^c)$ צפופה כנדרש. (תכונה של קבוצה פתוחה.)

(ב) כן, אם $\{S_i\}_{i \in I}$ צפופות אז $\overline{S_i} = X \quad \forall i \in I$

$$\Rightarrow \overline{\bigcup_{i \in I} S_i} \supseteq \bigcup_{i \in I} \overline{S_i} = X$$

כמו 1ב בדיוק

לכן $\bigcup_{i \in I} S_i$ צפופה.

(ג) לא, כפי שראינו $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c$ צפופות ב-$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$ לא צפופה.

(ד) נראה שלכל U פתוחה, $U \cap (G_1 \cap G_2) \neq \emptyset$.
ואכן, $U \cap G_1 \neq \emptyset$ כי G_1 צפופה. אך זו בהגדרה קבוצה פתוחה,
לכן $(U \cap G_1) \cap G_2 \neq \emptyset$, כי G_2 צפופה.
הערה: הסתפקנו בכך ש-G_1 פתוחה-צפופה, G_2 צפופה (לא בהכרח פתוחה).

5. נראה כי לכל קב' פתוחה $T \in \Omega_Y$ מתקיים $f(A) \cap T \neq \emptyset$.

נתבונן ב- $$f^{-1}(f(A) \cap T) = \underbrace{f^{-1}(f(A))}_{\supseteq A} \cap \underbrace{f^{-1}(T)}_{V \in \Omega_X}$$

$V \neq \emptyset$ כי f על. ; כי f רציפה

קיבלנו כי $$f^{-1}(f(A) \cap T) \supseteq A \cap V \neq \emptyset$$ כי V פתוחה ו-A צפופה

$$f(A) \cap T \supseteq f(\underbrace{A \cap V}_{\neq \emptyset}) \neq \emptyset$$

לכן $f(A) \cap T \neq \emptyset$, כנדרש.