Функциональный анализ и его приложения,
т. 8, вып. 2, 1974, 57—60.

НЕ В ЛЮБОЕ БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО МОЖНО ВЛОЖИТЬ l_p ИЛИ c_0

Б. С. Цирельсон

В геометрической теории банаховых пространств известна следующая проблема (см., например, [1]): верно ли, что любое бесконечномерное банахово пространство содержит подпространство, линейно гомеоморфное одному из пространств l_p, $1 \leqslant p < +\infty$, или c_0?

В настоящей работе дан отрицательный ответ на этот вопрос. Более того, построен пример рефлексивного банахова пространства, не содержащего бесконечномерного подпространства, линейно гомеоморфного равномерно выпуклому пространству. Более полная формулировка результата, указанная в теореме, использует следующее

Определение 1. Назовем банахово пространство X *финитно универсальным*, если существует $C > 1$ такое, что для любого конечномерного нормированного пространства E найдутся подпространство $F \subset X$ той же размерности и линейный обратимый оператор $T: E \to F$ такой, что $\| T \| \cdot \| T^{-1} \| < C$.

В этом определении можно, не изменяя смысла, ограничиться пространствами E вида l_∞^N (так обозначается N-мерное пространство с нормой $\max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_N|)$). В самом деле, всякое конечномерное нормированное пространство E можно при любом $\varepsilon > 0$ вложить в l_∞^N (где N достаточно велико) ε-изометрично; достаточно выбрать конечный набор линейных функционалов $g_1, \ldots, g_N \in E^*$ так, что $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} |g_j(x)| \leqslant \leqslant \|x\| \leqslant (1+\varepsilon) \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} |g_j(x)|$ и положить $Ux = (g_1(x), \ldots, g_N(x))$.

Очевидно, это свойство инвариантно при линейных гомеоморфизмах.

Лемма 1. *Равномерно выпуклое пространство не может быть финитно универсальным.*

Доказательство. Допустим, что X финитно универсально с константой C и одновременно равномерно выпукло. Существует $\theta \in \in (0, 1)$ такое, что из $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $\|(x-y)/2\| \geqslant 1/C$ вытекает $\|(x+y)/2\| \leqslant \theta$. Пусть дан обратимый оператор $T: l_\infty^N \to F \subset X$; покажем, что тогда $\| T \| \cdot \| T^{-1} \| > \min(C, \theta^{2-N})$. (Это сразу ведет к противоречию, если взять N достаточно большим, а T таким, что $\| T \| \cdot \| T^{-1} \| \leqslant C$.) При $N = 1$ доказываемое неравенство тривиально, для других N докажем его по индукции. Допустим, что $\| T \| \cdot \| T^{-1} \| \leqslant \min(C, \theta^{2-N})$. Будем считать, что l_∞^{N-1} естественным образом вложено в l_∞^N, и рассмотрим суже́ние U оператора T на l_∞^{N-1}; достаточно показать, что $\|U\| \leqslant \theta \, \| T \|$. Это легко выводится из того, что всякое $z \in l_\infty^{N-1}$, $\| z \| \leqslant 1$, представимо в виде $z = (x+y)/2$, $x, y \in l_\infty^N$, $\| x \| \leqslant 1$, $\| y \| \leqslant 1$, $\|(x-y)/2\| \geqslant 1$.

Теорема. *Существует рефлексивное банахово пространство, в котором каждое бесконечномерное подпространство финитно универсально.*

Доказательство теоремы будет дано после нескольких лемм. В лемме 2 конструируется слабо компактное множество K в пространстве c_0, обладающее некоторыми специальными свойствами. Затем доказывается, что его выпуклая замкнутая оболочка V тоже обладает этими свойствами.

Наконец, рассматривается то банахово пространство X, для которого V есть единичный шар, и доказывается, что оно является искомым.

Нам будет удобно говорить об элементах пространства m (и других пространств последовательностей) как о функциях на множестве натуральных чисел, применять к ним термин «поточечная сходимость» и т. п. Оператор, заменяющий значения в точках $1, \ldots, n$ нулями (т. е. оператор поточечного умножения на характеристическую функцию $\chi_{[n+1, +\infty)}$), обозначим P_n.

Определение 2. Набор $(x_1, \ldots, x_N)$ элементов пространства m *не содержит инверсий*, если для любых i, j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant N$, и любых k, l таких, что $x_i(k) \neq 0$ и $x_j(l) \neq 0$, выполнено условие $k < l$.

Понятно, что в таком случае x_i автоматически финитны, кроме, может быть, одного, а именно, последнего из ненулевых. Существуют i и n такие, что $x_i = P_n(x_1 + \ldots + x_N)$.

Сформулируем свойства, наличие которых мы будем впоследствии проверять для интересующих нас множеств A, лежащих в m.

(1) A входит в единичный шар. Каждый орт e_j (равный 1 в точке j и 0 в остальных точках) принадлежит A.

(2) $\forall x \in A\ \forall y \in m\ (|y| \leqslant |x| \Rightarrow y \in A)$. (Модули и неравенства — поточечные.)

Свойства (1), (2) сохраняются при переходе к замыканию и к выпуклой оболочке.

(3) Если $(x_1, \ldots, x_N)$ — набор элементов A (произвольной длины N), не содержащий инверсий, то $^1/_2 P_N(x_1 + \ldots + x_N) \in A$.

Если A обладает свойствами (1) — (3), то его замыкание (в топологии поточечной сходимости) тоже обладает ими.

(4) $\forall x \in A\ \exists n\ 2P_n(x) \in A$.

Многократное применение (4) дает

(4^a) $\forall x \in A\ \forall q\ \exists n\ 2^q P_n(x) \in A$; из (4^a) и (1) вытекает, что $A \subset c_0$. Свойство (4), вообще говоря, разрушается при переходе к замыканию.

Лемма 2. *Существует слабый компакт $K \subset c_0$, обладающий свойствами* (1) — (4).

Доказательство. Пусть A — наименьшее множество, обладающее свойствами (1) — (3). Иначе говоря, пусть $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, $A_1 = \{\alpha e_j\colon\ j \geqslant 1,\ \ |\alpha| \leqslant 1\}$ (e_j — орты), $A_{n+1} = A_n \cup B_n$, B_n — множество всех элементов вида $^1/_2 P_N(x_1 + \ldots + x_N)$, где $(x_1, \ldots, x_N)$ — произвольный не содержащий инверсий набор элементов множества A_n.

Определим K как замыкание множества A в пространстве m в топологии поточечной сходимости; K обладает свойствами (1) — (3), докажем свойство (4). Пусть $x \in K$; будем считать, что x не финитно, иначе доказывать нечего. Возьмем $x^{(s)}$ из A так, что $x^{(s)} \to x$ поточечно. При большом s функция $x^{(s)}$ отлична от нуля в точке $k_0 = \min\{k\colon x(k) \neq 0\}$ и еще по меньшей мере в одной точке, поэтому $x^{(s)} \notin A_1$. Но тогда $x^{(s)}$ принадлежит какому-либо из множеств B_n, т. е. $x^{(s)} = {}^1/_2 P_{N_s}(x_1^{(s)} + \ldots + x_{N_s}^{(s)})$, где $(x_1^{(s)}, \ldots, x_{N_s}^{(s)})$ — не содержащий инверсий набор элементов A. Существенно, что $N_s \leqslant k_0$ (поскольку $x^{(s)}(k_0) \neq 0$). Можно считать поэтому, что N_s не зависит от s, $N_s = N$, ведь при необходимости можно перейти к подпоследовательности $\{x^{(s_1)}, x^{(s_2)}, \ldots\}$. Также можно считать, что каждая из N последовательностей $\{x_i^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ поточечно сходится к некоторому x_i; $x_i \in K$. Переход к пределу дает $x = {}^1/_2 P_N(x_1 + \ldots + x_N)$; при этом набор $(x_1, \ldots, x_N)$ не содержит инверсий (как всякий предел последовательности наборов, не содержащих инверсий). Но тогда существуют i и n такие, что $x_i = P_n(x_1 + \ldots + x_N)$; отсюда $2P_{\max(n,N)}(x) = P_N P_n(x_1 + \ldots + x_N) = P_N(x_i) \in K$.

Итак, K обладает свойствами (1) — (4) и потому входит в c_0. На шаре пространства c_0 слабая топология совпадает с топологией поточечной сходимости, в которой K является компактом.

Лемма 3. *Пусть $K \subset c_0$ есть слабый компакт, обладающий свойствами* (1) — (4). *Тогда его выпуклая замкнутая оболочка V является абсолютно выпуклым слабым компактом в c_0 и обладает свойствами* (1) — (4).

Доказательство. Как известно, выпуклая замкнутая оболочка слабого компакта в банаховом пространстве всегда является слабым компактом. Абсолютная выпуклость V следует из того, что $x \in K \Rightarrow -x \in K$. Заметим, что безразлично, в какой топологии замыкать выпуклую оболочку M множества K — в нормированной, слабой или поточечной. Проверки требуют два факта: что M обладает свойством (3) и что V обладает свойством (4).

Пусть набор $(x_1, \ldots, x_N)$ не содержит инверсий, и каждое x_i является выпуклой комбинацией некоторых элементов K: $x_i = \alpha_i^{(1)} x_i^{(1)} + \ldots + \alpha_i^{(n)} x_i^{(n)}$, $x_i^{(s)} \in K$. Поскольку K обладает свойством (2), можно считать, что $x_i(k) = 0 \Rightarrow x_i^{(s)}(\kappa) = 0$; тогда при любом выборе индексов $s_1, \ldots, s_N$ из $[1, n]$ набор $(x_1^{(s_1)}, \ldots, x_N^{(s_N)})$ не содержит инверсий, поэтому $^1/_2\, P_N (x_1^{(s_1)} + \ldots + x_N^{(s_N)}) \in K$. Легко видеть, что $x_1 + \ldots + x_N$ представимо в виде выпуклой комбинации элементов вида $x_1^{(s_1)} + \ldots + x_N^{(s_N)}$; следовательно, $^1/_2\, P_N (x_1 + \ldots + x_N) \in M$.

Проверим (4). Положим $D_n = \{x \in K: 4P_n(x) \in K\}$; $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть возрастающая последовательность слабо замкнутых подмножеств K, причем их объединение равно K. Пусть $x_0 \in V$; тогда, как известно ([2], теорема 5.6.4), существует вероятностная мера μ на K (слабо борелевская регулярная) такая, что для всякого линейного функционала f на c_0 выполняется равенство $f(x_0) = \int_K f\, d\mu$. Поскольку $\mu D_n \to 1$, найдется n_0 такое, что $\mu D_{n_0} \geqslant {}^3/_4$; тогда $2P_{n_0}(x_0) \in V$, так как в противном случае существует функционал f такой, что $f(x_0) > 1$ и $\forall x\ (2P_{n_0}(x) \in V \Rightarrow |f(x)| \leqslant 1)$, а это ведет к противоречию:

$$1 < \int_{D_{n_0}} f\, d\mu + \int_{K \setminus D_{n_0}} f\, d\mu \leqslant \frac{1}{2} \mu D_{n_0} + 2\mu (K \setminus D_{n_0}) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Напомним, что нормированной *блок-системой* по базису $\{e_j\}_1^{\infty}$ называется всякая последовательность вида $\left\{ \sum_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} \lambda_j e_j \right\}_{i=1}^{\infty}$ при условии, что норма каждого ее члена равна 1.

Лемма 4. *Пусть абсолютно выпуклый слабый компакт $V \subset c_0$ обладает свойствами* (1) — (4). *Линейную оболочку множества V, снабженную нормой, в которой V есть единичный шар, обозначим через X. Тогда X есть рефлексивное банахово пространство; последовательность ортов $\{e_j\}_1^{\infty}$ образует безусловный базис в X, а сопряженная система функционалов $\{e_j^*\}_1^{\infty}$ — безусловный базис в сопряженном пространстве X^*. Если $\{x_i\}_1^{\infty}$ — какая-либо нормированная блок-система по базису $\{e_j\}_1^{\infty}$, то $\|P_N(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_N x_N)\|_X \leqslant 2 \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\lambda_i|$ для любых $N, \lambda_1, \ldots, \lambda_N$.*

Доказательство. Полнота X вытекает из замкнутости и ограниченности V в c_0. Чтобы убедиться, что $\{e_j\}$ есть базис в X, надо только проверить, что $\forall x \in X\ \|P_n x\|_X \underset{n}{\to} 0$, а это следует из (4^a). В силу (2) этот базис безусловный. Если $\{x_i\}$ — нормированная блок-система, то при любом N набор $(x_1, \ldots, x_N)$ не содержит инверсий; (3) дает $^1/_2\, P_N (x_1 + \ldots + x_N) \in V$; учитывая (2), получаем требуемые неравенства для $\| P_N \sum \lambda_i x_i \|_X$.

Докажем, что $\{e_j^*\}$ есть безусловный базис в X^*. Проверки требует только следующее: $\forall f \in X^*\ \| P_n^* f \| \underset{n}{\to} 0$. Допустим обратное: $\forall n\ \| P_n^* f \| > \varepsilon$; возьмем финитный x_1 такой, что $\| x_1 \| = 1$ и $f(x_1) > \varepsilon$; затем возьмем x_2, расположенный «правее», чем x_1, с теми же свойствами; продолжая этот процесс, получим нормированную блок-систему $\{x_i\}$ такую, что $\forall i\ f(x_i) > \varepsilon$. Очевидно, P_N оставляет $x_{N+1} + \ldots + x_{2N}$ без изменения, поэтому $\| x_{N+1} + \ldots + x_{2N} \| \leqslant 2$, несмотря на то, что $f(x_{N+1} + \ldots + x_{2N}) > N\varepsilon$; это противоречит непрерывности f.

Осталось доказать, что X рефлексивно, т. е. что V есть компакт в слабой топологии $\sigma(X, X^*)$. Мы покажем, что топологии $\sigma(X, X^*)$ и $\sigma(c_0, c_0^*)$ совпадают на V. Для каждого $f \in X^*$ сужéние $f|_V$ непрерывно в топологии $\sigma(c_0, c_0^*)$, так как $f|_V$ является равномерным пределом некоторой последовательности $\{f_n|_V\}$, $f_n \in c_0^*$, а именно, достаточно взять $f_n = f(e_1)\, e_1^* + \ldots + f(e_n)\, e_n^* = f - P_n^* f$. (Можно также воспользоваться условиями рефлексивности пространства с базисом, см. [3]).

Доказательство теоремы. Нужно доказать, что каждое бесконечномерное подпространство Y пространства X, рассмотренного в последней лемме, финитно универсально. Если $\{x_i\}$ есть нормированная блок-система по базису $\{e_j\}$ в X, то порожденное этой системой подпространство $X_0 \subset X$ финитно универсально, так как для любых N, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ имеем $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |\lambda_i| \leqslant \| \lambda_1 x_{N+1} + \ldots + \lambda_N x_{2N} \| \leqslant 2 \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} |\lambda_i|$. Поэтому достаточно выбрать $\{x_i\}$ так, чтобы X_0 оказалось линейно гомеоморфно некоторому подпространству $X_1 \subset Y$. Это делается обычным образом: последовательно выбираются y_i из Y и x_i так, что $\| y_i - x_i \| \leqslant 2^{-i-1}$, и применяется теорема Крейна — Мильмана — Рутмана об устойчивости минимальных систем [4], согласно которой существует линейный обратимый оператор S, отображающий X_0 на подпространство $X_1 \subset Y$, порожденное системой $\{y_i\}$, так, что $Sx_i = y_i$. Теорема доказана.

Замечание 1. Константа из определения финитной универсальности получена одна и та же для всех бесконечномерных подпространств построенного пространства и может быть взята сколь угодно близкой к 2; ее можно уменьшить, если при построении K заменить $^1/_2 P_N (x_1 + \ldots + x_N)$ на $(1 - \varepsilon) P_N (x_1 + \ldots + x_N)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует рефлексивное банахово пространство, в котором каждое бесконечномерное подпространство финитно универсально с константой $\leqslant 1 + \varepsilon$.

Замечание 2. Можно показать, что для всякого бесконечномерного подпространства $Z \subset X^*$ и всякого N существуют N-мерное подпространство $F \subset Z$ и обратимый оператор $T : l_1^N \to F$ такой, что $\| T \| \times \| T^{-1} \| < 3$. Из этого следует, что X^* тоже не содержит бесконечномерного подпространства, линейно гомеоморфного равномерно выпуклому.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 20 июля 1973 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Lindenstrauss J., The geometric theory of the classical Banach spaces, Actes du Congrès Intern. Math. 1970, v. 2, 365—372, Paris, 1971.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, М., ИЛ, 1962.
3. James R. C., Bases and reflexivity of Banach spaces, Ann. Math. 52, № 3 (1950).
4. Крейн М. Г., Мильман Д. П., Рутман М. А., Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха, Записки Харьк. матем. об-ва 16 (1940), 106—110.